7.2.12 Vektorový součin I

Předpoklady: 7208, 7211

Při násobení dvou čísel získáváme opět číslo. Skalární násobení vektorů je zcela odlišné, protože vynásobením dvou vektorů dostaneme číslo, tedy něco jiného.

Je možné vynásobit dva vektory a získat opět vektor? Co by takové násobení muselo pro výsledek určit?
Takové násobení musí jednoznačně určit výsledný vektor, tedy jednak velikost (jako u násobení čísel a skalárního násobení vektorů) a poté směr (to je novinka).

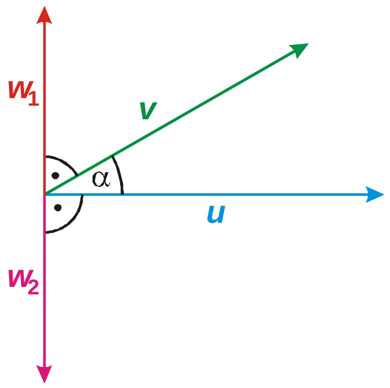
Takový postup existuje a nazývá se **vektorový součin**.
Nejdříve si řekneme jeho význam a pak se ho naučíme spočítat pomocí souřadnic.

Př. 1: Rozhodni, zda následující definice může být použita jako definice vektorového součinu dvou vektorů:
Vektorový součin dvou vektorů, které leží na jedné přímce, je nulový vektor.
Vektorový součin dvou vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, které neleží na jedné přímce, je vektor $\boldsymbol{w}$, který má tyto vlastnosti:
Vektor $\boldsymbol{w}$ je kolmý k oběma vektorům $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.
Platí: $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\alpha$, kde α je úhel vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.
Vektorový součin $\boldsymbol{w}$ vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ značíme $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$, tedy $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$.

Vyhovující definice by měla splňovat dvě podmínky:

- měla by pokrýt všechny možné situace (potřebuje vědět, jak určit vektorový součin pro každou dvojici vektorů),
- měla by být jednoznačná (všichni, kteří podle ní budou postupovat, dojdou ke stejnému výsledku).

Předchozí definice není správná. Vektor $\boldsymbol{w}$ podle ní není určen jednoznačně.
Pokud by vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ ležely ve vodorovné rovině, mohl by výsledný vektor $\boldsymbol{w}$ směřovat buď svisle vzhůru nebo svisle dolů



Pedagogická poznámka: Jen málokdy na řešení někdo přijde. Nečekám dlouho a začnu příklad postrkávat od tabule.

$\Rightarrow$ Do definice musíme doplnit pravidlo, které by jednu z možností zakázalo $\Rightarrow$ například, že vektory tvoří pravotočivou bázi.

Správná definice vektorového součinu.

Vektorový součin dvou vektorů, které leží na jedné přímce, je nulový vektor.
Vektorový součin dvou vektorů ***u***, ***v***, které neleží na jedné přímce, je vektor ***w***, který má tyto vlastnosti:

- Vektor ***w*** je kolmý k oběma vektorům ***u***, ***v***.
- Vektory ***u***, ***v***, ***w*** tvoří pravotočivou bázi.
- Platí: $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\alpha$, kde α je úhel vektorů ***u*** a ***v***.

Vektorový součin ***w*** vektorů ***u*** a ***v*** značíme $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$, tedy $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$.

Upozornění: Existují dva způsoby násobení vektorů:

- skalární součin (výsledek číslo) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$,
- vektorový součin (výsledek vektor) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$,

$\Rightarrow$ proto při zápisu záleží na tom, který znak píšeme. Při jeho záměně totiž počítáme něco úplně jiného.

Pedagogická poznámka: Předchozí upozornění není zbytečné. Studenti oba typy v zápisu často zaměňují (a dělají to bohužel i po upozornění).

Př. 2: Rozhodni, zda je vektorové násobení komutativní.

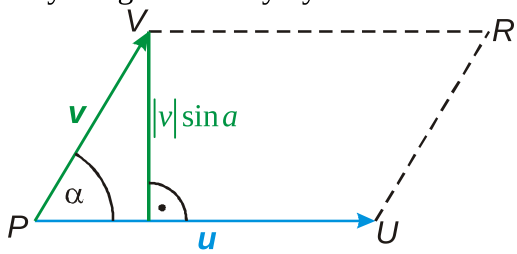
Vektorové násobení není komutativní, pokud prohodíme pořadí vektorů ***u*** a ***v***, obrátí se směr výsledného vektoru ***w***.

Pro každé vektory ***u***, ***v*** platí $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$.

Př. 3: Navrhni důvod, proč je vektorovým součinem vektorů ležících na jedné přímce nulový vektor.

Směrů kolmých k jedné přímce je v prostoru nekonečně mnoho $\Rightarrow$ vektorový součin by nebyl jednoznačně určitelný.
Pro vektory na jedné přímce platí: $\alpha = 0 \Rightarrow |\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\alpha = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin 0 = 0$.

Podíváme se na velikost vektorového součinu $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\alpha \Rightarrow$ “opačný“ vzorec než u skalárního součinu, čím větší úhel mezi vektory, tím větší výsledek vektorového součinu.
Jaký má geometrický význam?

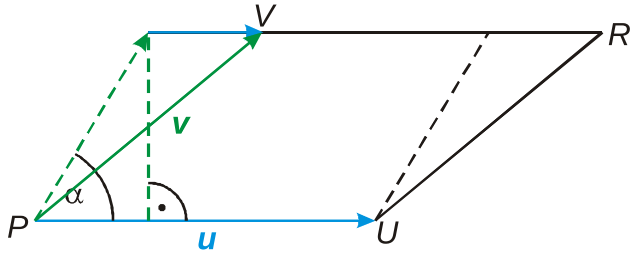


Geometrický význam: součin $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\alpha$ udává obsah rovnoběžníku *PURV*.

Př. 4: Pomocí geometrického významu čísla $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\alpha$ rozhodni, jak se změní vektorový součin pokud:

a) k vektoru ***v*** přičteme násobek vektoru ***u***,
b) pokud jeden z vektorů vynásobíme reálným číslem *k*.

a) k vektoru *v* přičteme násobek vektoru *u*
Vektorový součin se nezmění, protože se nezmění ani obsah rovnoběžníku *PURV*.



Rovnoběžník se přičtením násobku nakloní, ale jeho obsah zůstane stejný.
b) pokud jeden z vektorů vynásobíme reálným číslem *k*.
Rozdělíme si podle znaménka *k*.

- $k > 0$
  Pokud jeden z vektorů vynásobíme kladným číslem *k*, změní se jeho velikost *k* krát, úhel mezi vektory se nezmění $\Rightarrow$ vektorový součin se vynásobí číslem *k*.
- $k = 0$
  Pokud jeden z vektorů vynásobíme 0, bude mít nulovou velikost $\Rightarrow$ vektorový součin bude nulový $\Rightarrow$ vektorový součin se vynásobí číslem *k*.
- $k < 0$
  Pokud jeden z vektorů vynásobíme záporným číslem *k*, změní se jeho velikost *k* krát a jeho směr se obrátí, úhel mezi vektory se nezmění $\Rightarrow$ vektorový součin se zvětší *k* krát a obrátí se jeho směr $\Rightarrow$ vektorový součin se vynásobí číslem *k*.

Ve všech případech platí, že vektorový součin se vynásobí číslem *k*.

Pedagogická poznámka: Pokud je málo času, doporučuji bod b) konstatovat bez delšího rozebírání. Odpovídá běžné studentské představě.

Podobně jako u ostatních součinů i u vektorového usnadňují počítání speciální vlastnosti.

Př. 5: Doplň větu. Pro každé vektory ***a***, ***b***, ***c*** a pro každé číslo $t \in R$ platí:
a) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) =$ b) $\boldsymbol{a} \times (t\boldsymbol{b}) =$.

Pro každé vektory ***a***, ***b***, ***c*** a pro každé číslo $t \in R$ platí:
$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$,
$\boldsymbol{a} \times (t\boldsymbol{b}) = (t\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = t(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

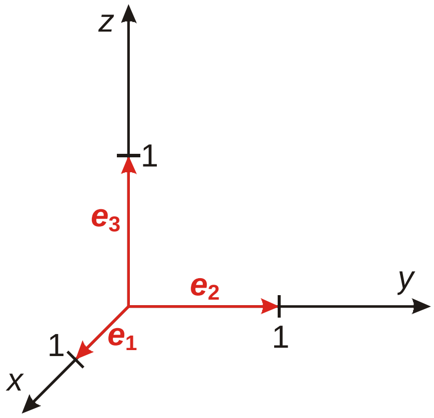
Vztahy dokážeme později. Teď konečně odvodíme vztah pro vektorový součin pomocí souřadnic.

Zvolíme si kartézskou pravotočivou soustavu souřadnic *Oxyz*. Osy mají takový směr, aby vektory, které mají jejich směr, tvořily pravotočivou bázi.
Každý vektor můžeme v této soustavě vyjádřit pomocí jednotkových vektorů ve směru jednotlivých os. Značíme je:

- $\boldsymbol{e}_1 = (1;0;0)$ (nebo také $\boldsymbol{e}_x$),
- $\boldsymbol{e}_2 = (0;1;0)$ (nebo také $\boldsymbol{e}_y$),

* $\boldsymbol{e}_3 = (0;0;1)$ (nebo také $\boldsymbol{e}_z$).

Př. 6: Nakresli obrázek kartézské soustavy souřadnic *Oxyz* a vyznač do ní vektory $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ a $\boldsymbol{e}_3$.



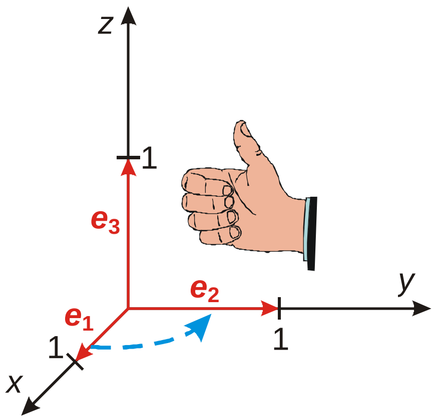
Př. 7: Urči vektorové součiny.

$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 =$	$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 =$	$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 =$
$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 =$	$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 =$	$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 =$
$\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 =$	$\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 =$	$\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 =$.

$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1$: součin dvou stejných (rovnoběžných) vektorů $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{o}$.

$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$: dva různoběžné vektory $\Rightarrow$ jejich vektorový součin je nenulový,

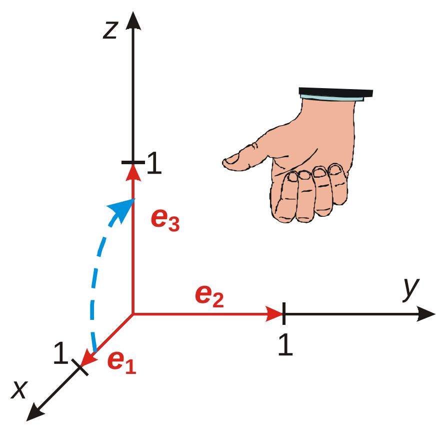
* velikost: $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\alpha = |\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|\sin 90° = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$ $\Rightarrow$ půjde opět o jednotkový vektor,



* směr: vektory $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{w}$ tvoří pravotočivou bázi:
  vektor $\boldsymbol{w}$ má stejný směr jako osa z $\Rightarrow$ hledaným vektorem je vektor $\boldsymbol{e}_3$ (má jednotkovou velikost a směr osy z) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$.

$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 =$: dva různoběžné vektory $\Rightarrow$ jejich vektorový součin je nenulový,

* velikost: $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\alpha = |\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|\sin 90° = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$ $\Rightarrow$ půjde opět o jednotkový vektor,



- směr: vektory $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{w}$ tvoří pravotočivou bázi:
  vektor $\boldsymbol{w}$ má opačný směr než osa y $\Rightarrow$ hledaným vektorem je vektor $-\boldsymbol{e}_2$ (má jednotkovou velikost a směr opačný k ose osy y) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2$.

Stejným způsobem určíme ostatní součiny.

$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{o}$	$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{o}$	$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$
$\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{o}$.

Pedagogická poznámka: Součin $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1$ určí studenti většinou sami, součin $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ je potřeba většině z nich ukázat (proto s ním u tabule příliš nečekám), zbytek pak již dopočítají. Někteří mají potíže se znaménky.

Například vektor $\boldsymbol{u} = (2;3;-1)$ můžeme napsat jako $\boldsymbol{u} = 2 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 3 \cdot \boldsymbol{e}_2 - 1 \cdot \boldsymbol{e}_3$.

Vyjádříme vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ pomocí vektorů $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

$$\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; a_3) = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; b_3) = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3$$

Teď oba vektory vynásobíme a použijeme pravidla na roznásobení.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) =$$

$$a_1\boldsymbol{e}_1 \times b_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 \times b_1\boldsymbol{e}_1 + a_3\boldsymbol{e}_3 \times b_1\boldsymbol{e}_1$$

$$a_1\boldsymbol{e}_1 \times b_2\boldsymbol{e}_2 + a_2\boldsymbol{e}_2 \times b_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \times b_2\boldsymbol{e}_2$$

$$a_1\boldsymbol{e}_1 \times b_3\boldsymbol{e}_3 + a_2\boldsymbol{e}_2 \times b_3\boldsymbol{e}_3 + a_3\boldsymbol{e}_3 \times b_3\boldsymbol{e}_3$$

Přerovnáme pořadí čísel a vektorů v součinech.

$$a_1b_1(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1) + a_2b_1(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1) + a_3b_1(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1)$$

$$a_1b_2(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) + a_2b_2(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2) + a_3b_2(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2)$$

$$a_1b_3(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3) + a_2b_3(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3) + a_3b_3(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3) =$$

Spočítáme vektorové součiny v závorkách (podle tabulky výše).

$a_1b_1\boldsymbol{o}+a_2b_1(-\boldsymbol{e}_3)+a_3b_1\boldsymbol{e}_2$
$a_1b_2\boldsymbol{e}_3+a_2b_2\boldsymbol{o}+a_3b_2(-\boldsymbol{e}_1)$
$a_1b_3(-\boldsymbol{e}_2)+a_2b_3\boldsymbol{e}_1+a_3b_3\boldsymbol{o}$

Dáme k sobě násobky stejných vektorů.
$(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3$

Teď už můžeme snadno určit souřadnice vektoru $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$.

Př. 8: Vzorec pro výpočet vektorového součinu ze souřadnic je velmi složitý. Zkus najít mnemotechnickou pomůcku pro jeho zapamatování.

Řešení na začátku příští hodiny.

Pedagogická poznámka: Předchozí odvození samozřejmě nezkouším a může se zdát zbytečné (vektorové součiny budou studenti v příští hodině počítat samozřejmě jinak). Na druhou stranu pokud ho studenti dělají sami a neopisují ho z tabule, je to krásný příklad zdlouhavého výpočtu náročného na přesnost.
Pokud odvození nestihneme dopočítat do konce, nic se neděje. Příští hodinu se k němu nevracíme, jenom ho ukážu z projektoru. Kdo o něj stojí, dodělá si ho sám, pro ostatní velkou cenu nemá.

Shrnutí: Vektorovým součinem dvou nerovnoběžných vektorů získáme vektor na oba kolmý.